

第 15 章 スケジュールのゲーム

15.1 チョウの羽化季節

雌と交尾をするための、雄にとって最適な羽化のタイミングを考える。 t 日目に羽化する雄と雌の数を、それぞれ $g(t)$ と $f(t)$ と表す。 t 日目に生存している雄の数 $m(t)$ は、

$$m(t) = \int_0^t g(x) e^{-\mu_a(t-x)} dx \quad (15.1)$$

ここでは羽化日 x から t 日目までの生存確率を 1 日当たり死亡率を μ_a として考慮している。繁殖シーズンは $t = 0$ から $t = T$ までにわたる。生存している雄 1 匹当たりの平均交尾数は $f(t)/g(t)$ である。これより t 日目に羽化した雄が生涯を通じて交尾できる数は、

$$\phi(t) = e^{-\mu_b t} \int_t^T \{f(x)/m(x)\} e^{-\mu_a(x-t)} dx \quad (15.2)$$

となる。 μ_b は羽化日 t までの 1 日当たり死亡率である。

(15.2) 式の ϕ は雄の生涯繁殖度 (適応度) を表している。長い進化過程の後には、それぞれの雄が最高の交尾数をもてる日に羽化するように思われるが、このモデルを調べてみると、交尾数 $\phi(t)$ を最大にする最適日があってその日にすべての雄が羽化する、というようにはならない。直観的な理由を以下に述べよう。 t 日目に羽化した雄が、他のどの日に羽化したものよりも多くの交尾数をもつと想定する。すると雄の羽化日に対して自然淘汰が働き、その結果 t 日目に羽化する雄の数が増加する。雄は他の雄と雌の獲得をめぐって競合するため、雄 1 匹当たりの交尾数は他の雄が増加するにつれて減少する。(15.2) 式を見れば、実際に $\phi(t)$ は $m(t)$ の影響を受ける。結局最適の日に羽化しても、他の日に羽化した場合と同一の期待交尾数しかもてなくなる。

結果として実現する平衡状態では、雄の羽化は特定の日に集中せずに広がりをもつ。

$$g(t) > 0 \quad \text{であるすべての } t \text{ で} \quad \phi(t) = \lambda \quad (15.3a)$$

$$g(t) = 0 \quad \text{であるすべての } t \text{ で} \quad \phi(t) < \lambda \quad (15.3b)$$

これらの条件は、雄がプレイヤーで評価関数 $\phi(t)$ を最大にするべくそれぞれに戦略 t を選ぶというゲームの非協力平衡条件である。また、羽化日に関する理想自由分布とも考えられる。

死亡率 (μ_a と μ_b) が与えられると、進化平衡状態における雄の羽化パターンを定めることができる。死亡率の差によって雄の羽化パターンは異なる (図 15.1)。注目すべきは、進化平衡状態での雄の羽化曲線は切れた分布になり、 t_s までは毎日いくらかの雄が羽化するが、それ以後は雄の羽化が止まってしまうということである^{*1}

^{*1} 演習 15.1 を参照。うまく解けませんでした。

15.2 カエルの性比の季節変化

活動する雄 1 匹当たりの期待交尾数は、 $f(t)/m(t)$ である。活動している雄は捕食者に見つかりやすく、1 日当たりの死亡率 μ_a は活動していない雄の死亡率 μ_i より高い。活動レベル $\sigma(t)$ は $0 \leq \sigma(t) \leq 1$ の範囲をとる。すると t 日目の交尾成功度は $\sigma(t)f(t)/m(t)$ 、死亡率は $\mu_i(1 - \sigma(t))$ となる。シーズンを通じての繁殖成功度は

$$\phi = \int_0^T \sigma(t) \{f(t)/m(t)\} \exp\left[-\int_0^T \{\mu_a \sigma(x) + \mu_i(1 - \sigma(x))\} dx\right] dt \quad (15.4)$$

である。雄は ϕ を最大にするように繁殖スケジュール $\sigma(t)$ を選ぶ。

この問題は、連続時間の動的計画法を用いることで解くことができる。 t 日目に生存している雄が、繁殖期間の終わりまでに達成する交尾数の期待値を、

$$V(t) = \max \int_t^T \sigma(s) \{f(s)/m(s)\} \exp\left[-\int_t^s \{\mu_a \dots\} dx\right] ds \quad (15.5)$$

と定義する。2 つの積分を $(t, t + \Delta t)$ と $(t + \Delta t, T)$ に分割すると、

$$V(t) = \max [\sigma(t) \{f(t)/m(t)\} \Delta t + \{1 - (\mu_a \sigma + \mu_i(1 - \sigma)) \Delta t\} V(t + \Delta t)]$$

と書ける^{*2}。 Δt についてテーラー展開した後、 Δt が小さくなった極限では、

$$0 = \max_{0 \leq \sigma \leq 1} [\sigma(t) \{f(t)/m(t) - (\mu_a - \mu_i)V(t)\} + dV/dt - \mu_i V] \quad (15.6)$$

が得られ^{*3}、 t 日目の最適活動レベル $\sigma(t)$ は、

$$f(t)/m(t) - (\mu_a - \mu_i)V(t)$$

の符号によって決定される。

それぞれの雄が最適行動をとろうとするときの非協力平衡解を考えてみる。 $\sigma(t)$ と $m(t)$ の条件を満たすように、活動する雄の数 $m(t)$ を求めることができる。すると次のような結果が得られる。

^{*2} 第 1 項は時間区間内の平均交尾数、第 2 項は $t + \Delta t$ 以後での繁殖成功度である。

^{*3} $V(t + \Delta t)$ を 1 次の項までテーラー近似して、 $V(t + \Delta t) = V(t) + \{dV(t)/dt\} \Delta t$ を代入する。辺々整理して両辺を Δt で割ってから、 Δt を 0 に近づけると (15.6) 式が得られる。

繁殖期間の中ごろまでは、雄の一部が休み他の一部が活動するという日が続く。この間では、活動する雌の数 $m(t)$ は、雌の到来数 $f(t)$ とは正の相関をもつ。

$$m(t)/f(t) \propto \exp[-\mu_i t] \quad (15.7)$$

のように雄と雌の比率は指数関数を描いて減少する。その現象速度の係数は不活発な雄の1日当たりの死亡率 μ_i に等しい。(15.7)式は実行性比と呼ばれる。

15.3 1日のうちの活動時間帯

雄の活動時間帯をその適応戦略として理解するためにゲームモデルを考える。未交尾雌の数 $F(t)$ が、日の出 ($t = 0$) から日の入り ($t = T$) までの間、時間とともに変化する様子は、

$$dF/dt = f(t) - b(t)m(t)F(t) \quad (15.8)$$

に従う。1日のうち雌探し活動に当てるべき活動が限られているなかで、雄がそれをどの時間帯に用いるべきかであるかが、ここでの問題である。前節と同様に繁殖活動のスケジュールは時間の関数 $\sigma(t)$ として表す。また、それぞれの雄は1日に述べ K 時間の繁殖活動が可能であるとする。

$$\int_0^T \sigma(t) dt = K \quad (15.9)$$

それぞれの雄は、(15.9)式の制約下で交尾期大数

$$\phi = \int_0^T b(t)F(t)\sigma(t) dt \quad (15.10)$$

が最大になるように活動スケジュールを選ぶ。雄チョウの活動スケジュールの結果は、図 15.6 で示されている。

雄が活動している期間 ($m(t) > 0$) においては、

$$m(t) = f(t)K M_{\text{total}}/F_{\text{total}} + (1/b^2)db/dt \quad (15.11)$$

が成立する^{*4}。

^{*4} 演習 15.3 を参照。(15.9)式、(15.10)式で定式化されている最適化問題に対して、ラグランジュアンを

$$\Phi = \phi + \lambda[K - \int_0^T \sigma(t) dt] = \int_0^T (b(t)F(t) - \lambda)\sigma(t) dt + \lambda K \quad (1)$$

15.4 ゲームにおける順序と情報

これまでの節で紹介されたモデルでは、プレイヤーの数がきわめて多数であるために1人の行動が全体に与える影響は小さいか、無視することができた。しかし、動的なゲームにおいては、相手の戦略を知ったうえで決定を下すのかどうかに関する仮定が、結果に大きな影響を与える。

寄生蜂で、ある寄主を見つけた雌蜂が何個の卵を産むのかを決定するという問題を考える。1寄主に x 個の卵を産んだとき、繁殖成功の期待値を $S(x) = a - bx$ とする。雌蜂がその寄主を独占的に利用できるならば、

$$\phi(x) = xS(x) = x(a - bx) \quad (15.12)$$

を最大にし、 $x^* = a/2b$ と求まる。

同一の寄主に2個体の雌が重複して産卵する場合はどうだろうか。第1と第2の雌の産卵数を x と y とする。第1の雌の繁殖成功度は、

$$\phi_1(x, y) = xS(x + y) = x\{a - b(x + y)\} \quad (15.13a)$$

第2の雌の繁殖成功度は、

$$\phi_2(y, x) = yS(x + y) = y\{a - b(x + y)\} \quad (15.13b)$$

ここではそれぞれの雌が、相手の産卵数を所与として自らの産卵数を最適に選ぶ場合を考えよう。これはナッシュ平衡である。すると、 $\partial\phi_1/\partial x = 0$ 、 $\partial\phi_2/\partial y = 0$ という最大化の条件を連立して、 $x = y = a/3b$ が得られる。独占する場合の産卵数 ($a/2b$) よりもそれぞれの産卵数は少ないが、2匹の合計 ($2a/3b$) ではより多い卵を産卵する。

次に、第1の雌が自身の産卵数 x を決定する際に、後で来る第2雌の産卵数 y が第1雌の産卵数 x に合わせて決まることを考慮するとする。このとき、 y が ϕ_2 を最大にするべく選ばれることから $\partial\phi_2/\partial y = 0$ 、すなわち $y[x] = (a - bx)/2b$ が得られる。これを $\phi_1(x, y)$ に代入して、

$$\phi(x, y[x]) = xS(x + y[x]) = x[a - b\{x + (a - bx)/2b\}] \quad (15.14)$$

が第1雌の繁殖成功度である。この最適解は $x^* = a/2b$ である。また第2雌の最適解は、 $y[a/2b] = a/4b$ となる。

このゲームの第1種のように、一方のプレイヤーが、相手が自分のとった戦略に合わせて戦略を決めることを計算して強気に出ているときには先導者 (leader)、それに合わせる相手は追

とおく。これを最大化すればよいのだが、これは各時点 t で被積分関数 $(b(t)F(t) - \lambda)\sigma(t)$ が制約なしに最大化される問題と等しい。よって、 $bF > \lambda$ ならば $\sigma = 1$ 、 $bF < \lambda$ ならば $\sigma = 0$ となる。 $0 < \sigma(t) < 1$ という時間区間が最適解であったとすると、 $b(t)F(t) - \lambda = 0$ が恒等的に成立する。 $F(t) = \lambda/b(t)$ を (15.8) 式に代入して整理すると、 $m(t) = f(t)/\lambda + (1/b^2)db/dt$ が得られる。また、 $\lambda = F_{\text{total}}/KM_{\text{total}}$ から、(15.11) 式が得られる。

随者 (follower) と呼ばれる。このようにして実現する状態はシュタッケルベルク (stackelberg equilibrium) という。これは両方が追随者となるナッシュ平衡とは異なる。

第2雌は第1雌の行動を知っているがために、かえって適応度を下げている (産卵数を比較せよ)。このようにゲームにおいては、情報を得る能力を進化させる結果、自らにとって不利な状況を引き起こす可能性がある。